

Exercices Série 12

1) Calculez les produits vectoriels suivants $\vec{x} \wedge \vec{y}$ avec les vecteurs suivants :

- $\vec{x} = (1, 2, 3)$ et $\vec{y} = (3, 2, 1)$
- $\vec{x} = (-1, 2, -3)$ et $\vec{y} = (3, 2, 1)$

2) Montrez que $\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$ pour $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$.

Réponses

1) Rappelons que que

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \text{ ce qui donne les résultats suivants : } \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

2) $\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{y} \wedge \vec{x} = \begin{pmatrix} y_2 x_3 - y_3 x_2 \\ -y_1 x_3 + y_3 x_1 \\ y_1 x_2 - y_2 x_1 \end{pmatrix}$ que nous obtenons simplement en remplaçant x_i par y_i et vice-versa dans la définition.

Si nous changeons les signes dans la seconde équation, nous obtenons

$$-\vec{y} \wedge \vec{x} = -1 \times \begin{pmatrix} y_2 x_3 - y_3 x_2 \\ -y_1 x_3 + y_3 x_1 \\ y_1 x_2 - y_2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 x_3 + y_3 x_2 \\ y_1 x_3 - y_3 x_1 \\ -y_1 x_2 + y_2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} = \vec{x} \wedge \vec{y},$$

où l'avant-dernière égalité est obtenue en réarrangeant les éléments de droite à gauche.

Ce qui montre bien que $\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$. CQFD.